
SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

A. BOVE

PARAMETRICE PER UN PROBLEMA DI CAUCHY
CARATTERISTICO

5 MAGGIO 1983

Sia P il seguente operatore del secondo ordine

$$(1) \quad P = t \partial_t^2 - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} + (v(t,x) + 1) \partial_t + \sum_{j=1}^n b_j(t,x) \partial_{x_j} + c(t,x).$$

Supponiamo che i coefficienti siano C^∞ in $R_x^n \times R_t$ e che $A(t,x,\xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x) \xi_i \xi_j$, $\xi \in R^n$, siano una forma quadratica reale e definitiva positiva.

Questa è una situazione modello per un operatore differenziale del secondo ordine, nel caso in cui si verificano le situazioni seguenti (denotiamo con $Q(y,D_y)$ tale operatore):

- i) Il simbolo principale di $Q(y,D_y)$, $q(y,\eta)$ è reale.
 - ii) Sia Y una varietà di codimensione 1 in R^{n+1} ; allora se $(y,\eta) \in T_Y^* R^{n+1} \setminus 0$, $q(y,\eta) = 0$ se e solo se $(y,\eta) \in N^* Y \setminus 0$.
 - iii) Su $N^* Y \setminus 0$ l'hamiltoniano H_q è $\neq 0$ e parallelo al campo radiale $\langle n, \partial_n \rangle$.
- Vogliamo costruire una parametrica per il problema di Cauchy

$$(2) \quad \begin{cases} Pu(t,x) = 0 & , \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = g & ; \end{cases}$$

in altri termini si vuole costruire un operatore

$$E: D'(R_x^n) \longrightarrow C^\infty(R_t^+; D'(R_x^n))$$

tale che

$$(3) \quad \begin{aligned} P E : \mathcal{D}'(\mathbb{R}_x^n) &\rightarrow C^\infty(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^n) \\ \gamma E - I : \mathcal{D}'(\mathbb{R}_x^n) &\rightarrow C^\infty(\mathbb{R}_x^n) \end{aligned}$$

Con una riduzione preliminare al caso di funzioni piatte in t su $t = 0$, per mezzo di stime di energia, non è difficile provare che data $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, (2) ha una unica soluzione $u \in C^\infty(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^n)$ se e solo se

$$(4) \quad v(0, x) + 1 \notin \{0, -1, -2, \dots\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Enunciamo ora il risultato:

Teorema. Esiste una parametrica E del problema (2) che gode delle seguenti proprietà:

$$i) \quad WF(\partial_t^k E g |_{t=s}) \subset WF(E g |_{t=s}), \quad k \geq 1, s \geq 0,$$

in particolare non v'è propagazione lungo il bordo.

ii) Sia $\Lambda_t^\pm \subset \Lambda_{T^* \mathbb{R}^n} \setminus 0$, $t \geq 0$, la seguente relazione canonica omogenea:

$$\Lambda_t^\pm = \{ (x^\pm(t; y, \eta), \xi^\pm(t; y, \eta), (y, \eta)) ; (y, \eta) \in T^* \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \},$$

dove

$$\mathbb{R}_t^+ \ni t \mapsto (x^\pm(t; y, \eta), \xi^\pm(t; y, \eta)) \text{ è la bicaratteristica di } \pm \sqrt{A(t, x, \xi)}$$

uscente dal punto (y, η) . Allora

$$WF(E g |_{t=s}) = (\Lambda_{2\sqrt{s}}^+ \cup \Lambda_{2\sqrt{s}}^-) \circ WF(g), \quad \forall s \geq 0.$$

I dettagli della prova del Teorema si trovano in [1].

1. UN MODELLO

Come guida risolviamo il seguente problema modello:

$$(1.1) \quad \begin{cases} [t \partial_t^2 - \Delta_x + (v_0 + 1) \partial_t] u = 0 & , \quad t > 0 \\ u(0, x) = g(x) & , \quad v_0 \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Ponendo $\hat{u}(t, \xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} u(t, x) dx$ otteniamo:

$$(1.2) \quad \begin{cases} t \partial_t^2 \hat{u} + |\xi|^2 \hat{u} + (v_0 + 1) \partial_t \hat{u} = 0 \\ \hat{u}(0, \xi) = \hat{g}(\xi) \end{cases}$$

Ponendo $z = 2\sqrt{t} |\xi|$ e $\hat{u}(t, \xi) = t^{-v_0/2} w(z)$, si vede che $w(z)$ verifica l'equazione di Bessel

$$(1.3) \quad (z^2 \partial_z^2 + z \partial_z + z^2 - v_0^2) w(z) = 0.$$

Allora

$$(1.4) \quad w(z) = c(\xi) J_{v_0}(z) = c(\xi) \left(\frac{z}{2}\right)^{v_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{k! \Gamma(v_0 + k + 1)}$$

Se $v_0 + 1 \notin \{0, -1, -2, \dots\}$ si ha immediatamente

$$(1.5) \quad \hat{u}(t, \xi) = i^{(v_0+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-v_0} J_{v_0}(z) \Big|_{z=2\sqrt{t}|\xi|} \hat{g}(\xi),$$

sicché

$$(1.6) \quad u(t,x) = \int e^{ix \cdot \xi} \tilde{J}_{\nu_0} (2\sqrt{t}|\xi|) \hat{g}(\xi) d\xi,$$

dove $d\xi = (2\pi)^{-n} d\xi$, $J_{\nu_0}(z) = (\nu_0 + 1) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu_0} J_{\nu_0}(z)$.

Ora $J_{\nu_0}(2\sqrt{t}|\xi|) \in C^\infty(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_\xi^n)$.

Se scriviamo $J_{\nu_0}(z) = \frac{1}{2} (H_{\nu_0}^+(z) + H_{\nu_0}^-(z))$, dove $H_{\nu_0}^\pm$ denota la funzione di Hankel di prima e seconda specie, tenendo presente che se $|z| > 1$

$$(1.7) \quad H_{\nu_0}^\pm(z) \sim \frac{e^{\pm i(\frac{\pi}{2}\nu_0 + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{\pi/2}} e^{\pm iz} z^{-1/2} \sum_{j \geq 0} c_j (\mp 2iz)^{-j}, \quad (c_0=1)$$

otteniamo che

$$(1.8) \quad u(t,x) = \sum_{\pm} \int e^{i(x \cdot \xi \pm 2\sqrt{t}|\xi|)} b^\pm(2\sqrt{t}|\xi|) \hat{g}(\xi) dt d\xi,$$

con $b^\pm(z) \in S_{1,0}^{-\text{Re } \nu_0 - 1/2}(\mathbb{R}_z^+)$.

Ora l'osservazione importante a questo punto è che il simbolo J_{ν_0} in (1.6) ha un comportamento diverso a seconda che lo si consideri nella zona $t|\xi| < \text{cost}$ o $t|\xi| > \text{cost} > 0$. Più precisamente se χ è una funzione cut off, $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\chi(0) = 1$, si ha

$$(1.9) \quad |\partial_t^r \partial_\xi^\alpha (\chi(t|\xi|^2) J_{\nu_0}(2\sqrt{t}|\xi|))| \lesssim |\xi|^{-|\alpha|} (\sqrt{t} + \frac{1}{|\xi|})^{-r}$$

$$(1.10) \quad |\partial_t^r \partial_\xi^\alpha (1-\chi(t|\xi|^2)) b^\pm(2\sqrt{t}|\xi|)| \lesssim |\xi|^{\mu-|\alpha|} (\sqrt{t} + \frac{1}{|\xi|})^{\mu-2r},$$

$$\mu = -\text{Re } \nu_0 - 1/2.$$

Le disuguaglianze (1.9), (1.10) individuano classi di simboli di tipo Boutet de Monvel [2].

Ciò suggerisce l'idea di fare la costruzione in modo differente nelle due zone $\sqrt{t} |\xi| \leq \text{cost}$.

In ciò che segue è contenuto un cenno di come formalmente può essere fatta tale costruzione.

2. LA COSTRUZIONE FORMALE

(a) zona $t|\xi| < \text{cost}$.

Cerchiamo una parametrice del problema di Cauchy (2) nella forma

$$(2.1) \quad E_g(t, x) = \int e^{ix \cdot \xi} q(t, x, \xi) \hat{g}(\xi) d\xi, \quad t \geq 0,$$

con $q(t, x, \xi) \sim \sum_{j \geq 0} q_{-j/2}(t, x, \xi)$, ove $q_{-j/2}$ sono omogenee di ordine $-j/2$ nel senso che

$$(2.2) \quad q_{-j/2}\left(\frac{t}{\lambda}, x, \lambda \xi\right) = \lambda^{-j/2} q_{-j/2}(t, x, \xi), \quad \lambda > 0, j \geq 0.$$

La classe delle funzioni regolari e omogenee nel senso (2.2) viene indicata con $\Psi^{-j/2}$. Si ha

$$(2.3) \quad P E_g(t, x) = \int e^{ix \cdot \xi} \tilde{q}(t, x, \xi) \hat{g}(\xi) d\xi,$$

ove $\tilde{q}(t, x, \xi) = e^{-ix \cdot \xi} P(e^{ix \cdot \xi} q(t, x, \xi))$.

con le condizioni $\tilde{q}(t, x, \xi) \sim 0$, $q(0, x, \xi) \sim 1$.

Eguagliando i vari ordini di omogeneità si ottiene:

$$(2.4) \quad q \sim L_1 q_0 + (L_1 q_{-1/2} + L_{1/2} q_0) + (L_1 q_{-1} + L_{1/2} q_{-1/2} + L_0 q_0) + \dots$$

per certi operatori differenziali (in t e x) per cui

$$L_1 : \psi^m \rightarrow \psi^{m+1}, \quad L_{1/2-k} : \psi^m \rightarrow \psi^{m+1/2-k},$$

$$L_{-k} : \psi^m \rightarrow \psi^{m-k}, \quad k \geq 0, m \in \mathbb{R}.$$

Otteniamo così le seguenti equazioni di trasporto

$$(2.5) \quad \begin{cases} L_1 q_0 = 0, t > 0 & L_1 q_{-j/2} = -\sum_i^j L_{1-h/2} q_{-j/2+h/2} \\ q_0|_{t=0} = 1 & q_{-j/2}|_{t=0} = 0, j \geq 1, \end{cases}$$

dove

$$(2.6) \quad L_1 = t \partial_t^2 + (v_0(x) + 1) \partial_t + A_0(x, \xi),$$

$$v_0(x) = v(0, x), \quad A_0(x, \xi) = A(0, x, \xi).$$

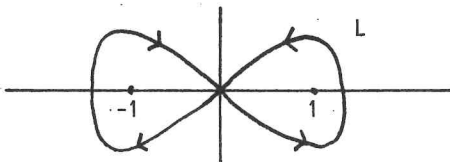
Per risolvere (2.5) poniamo $z = 2\sqrt{t} a(x, \xi)$, $a(x, \xi) = A_0(x, \xi)$. Come per il caso modello otteniamo:

$$(2.7) \quad q_0(t, x, \xi) = (v_0(x) + 1) \left(\frac{z}{2}\right)^{-v_0(x)} J_{v_0(x)}(z) \Big|_{z=2\sqrt{t} a(x, \xi)} \in \Psi^0.$$

Per risolvere le altre equazioni di trasporto, osserviamo che

$$(2.8) \quad J_{\nu_0}(z) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \nu_0)}{\sqrt{\pi}} \int_L e^{iq\sigma} (\sigma^2 - 1)^{\nu_0 - 1/2} d\sigma, \quad d\sigma = \frac{d\sigma}{2\pi i}$$

con



(purch  $\frac{1}{2} - \nu_0 \notin \{0, -1, -2, \dots\}$). Quindi se $q_0(z, x) = \int_L e^{iz\delta} (\delta^2 - 1)^{\nu_0(x) - 1/2} d\delta$, si ha

$$q_0(t, x, \xi) = \frac{\Gamma(\nu_0(x) + 1) \Gamma(\frac{1}{2} - \nu_0(x))}{\sqrt{\pi}} \hat{q}_0(2\sqrt{t} a(x, \xi), x).$$

Ora si prova che $\forall j \geq 1$ esiste una funzione \hat{q}_{-j} ,

$$(2.9) \quad \hat{q}_{-j}(z, x) = \sum_{\substack{0 \leq p \leq 2j \\ 0 \leq q \leq 2j}} c_{j,p,q}(x, \xi) \int_L e^{iz\delta} (\delta^2 - 1)^{\nu_0(x) - p - 1/2} (1n(\delta^2 - 1))^q d\delta$$

con $c_{j,p,q}$ omogeneo di grado $-j$ in ξ , tale che

$$q_{-j/2}(t, x, \xi) = \hat{q}_{-j}(2\sqrt{t} a(x, \xi), x) \in \Psi^{-j/2}$$

La q   quindi costruita sommando la serie asintotica $\sum_{j \geq 0} q_{-j/2}$ nel senso delle classi definite da (1.8).

b) zona $t|\xi| > \text{cost.}$

Per quanto mostrato nel caso modello, in questa zona si va a

cercare una parametrice nella forma di somma di due operatori integrali di Fourier (OIF):

$$(2.10) \quad \begin{cases} E g = E^+ g + E^- g & , \quad \text{con} \\ E^\pm g(t, x) = \int e^{i \phi^\pm(t, x, \xi)} p^\pm(2\sqrt{t} a(x, \xi), x, \xi) \hat{g}(\xi) d\xi \end{cases}$$

Le fasi corrette che danno luogo al fenomeno di propagazione descritto nel teorema si ottengono andando a risolvere le equazioni d'ic_o nale:

$$(2.11) \quad \begin{cases} \sqrt{t} \partial_t \phi^\pm = \pm \sqrt{A(t, x, d_x \phi^\pm)} & , \quad t > 0 \\ \phi^\pm \Big|_{t=0} = x \cdot \xi . \end{cases}$$

Queste si risolvono rapidamente: basta porre $\phi^\pm(t, x, \xi) = \psi^\pm(2\sqrt{t}, x, \xi)$.
Le ψ^\pm allora verificano

$$(2.12)_\pm \quad \begin{cases} \partial_s \psi^\pm(s, x, \xi) = \pm \sqrt{A\left(\frac{s^2}{4}, x, d_x \psi^\pm(s, x, \xi)\right)} \\ \psi^\pm(0, x, \xi) = x \cdot \xi \end{cases}$$

che sono le equazioni d'ic_o nale corrispondenti a una equazione strettamente iperbolica del second'ordine, e quindi standard.

Per quanto riguarda le ampiezze degli OIF di (2.10), p^\pm , andiamo a cercare le funzioni $p^\pm(z, x, \xi)$ come "somma" di serie asintotiche del tipo $\sum_{j \geq 0} p_{-j}^\pm(z, x, \xi)$, con $p_{-j}^\pm \in C^\infty(\mathbb{R}_z^+ \times \mathbb{R}_x^n \times (\mathbb{R}_\xi^n \setminus \{0\}))$, omogenee di grado $-j$ nel senso che

$$(2.13) \quad p_{-j}^{\pm}(z, x, \lambda \xi) = \lambda^{-j} p_{-j}^{\pm}(z, x, \xi), \quad \lambda > 0, \quad j \geq 0;$$

scriveremo $p_{-j}^{\pm} \in \phi^{-j}$.

Ora in modo del tutto formale si ha

$$(2.14) \quad \phi^{\pm}(t, x, \xi) \sim x \cdot \xi \pm z + \sum_{k \geq 2} \alpha_{1-k}^{\pm}(x, \xi) z^k \Big|_{z = 2\sqrt{t} a(x, \xi)}$$

dove $\alpha_{1-k}^{\pm}(x, \lambda \xi) = \lambda^{1-k} \alpha_{1-k}^{\pm}(x, \xi), \quad \lambda > 0, \quad k \geq 2.$

Applicando P nella (2.10) si ha la condizione

$$(2.15) \quad e^{-i\phi^{\pm}} P(e^{i\phi^{\pm}} p^{\pm}) \sim 0.$$

Sostituendo (2.14) nello sviluppo asintotico di (2.15) si ha

$$(2.16) \quad e^{-i\phi^{\pm}} P(e^{i\phi^{\pm}} p^{\pm}) \sim \sum_{k \geq 0} \left[L_1^{\pm} p_{-k}^{\pm} + \sum_{\substack{j, h \geq 0 \\ j+h=k-1}} L_{1/2}^{(j), \pm} p_{-h}^{\pm} + \sum_{\substack{j, h \geq 0 \\ j+h=k-2}} L_0^{(j), \pm} p_{-h}^{\pm} \right],$$

dove gli operatori differenziali $L_1^{\pm}, L_{1/2}^{(j), \pm}, L_0^{(j), \pm}$ fanno crescere il grado di omogeneità di $2, +1-j, -j$ rispettivamente (si noti che gli L operano nelle variabili (z, x)).

Si ha

$$(2.17) \quad L_1^{\pm} = a'(x, \xi)^2 \left[d_z^2 + \frac{2v_0(x) + 1 \pm 2iz}{z} d_z \pm i \frac{2v_0(x) + 1}{z} \right]$$

La (2.16) fornisce una successione di equazioni di trasporto, in cui a priori non si dà alcun dato di Cauchy a $z = 0$. La prima di tali

equazioni è $L_1^\pm p_0^\pm = 0$, che si risolve osservando che

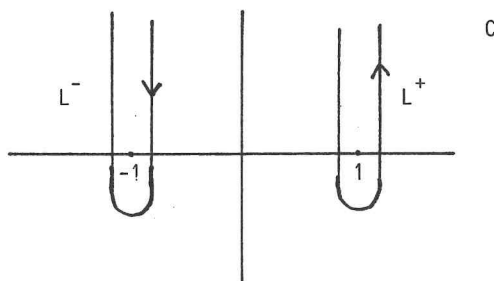
$$(2.18) \quad e^{\pm iz} L_1^\pm (e^{\mp iz} G(z)) = \frac{a(x, \xi)^2}{z} M G(z) \quad , \quad \text{dove}$$

$$(2.19) \quad M = z \partial_z^2 + (2\nu_0(x) + 1) \partial_z + z$$

è l'operatore di Eulero - Poisson - Darboux.

Si ha allora che

$$(2.20) \quad p_0^\pm(z, x, \xi) = \frac{\Gamma(\nu_0(x) + 1) \Gamma(\frac{1}{2} - \nu_0(x))}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{\pm iz} \int_{L^\pm} e^{iz\sigma} (\sigma^2 - 1)^{\nu_0(x) - 1/2} d\sigma \quad , \quad \text{dove}$$



E' facile verificare che $p_0^\pm \in \Phi^0$, $L_1^\pm p_0^\pm = 0$ se $z > 0$, e che $(p_0^+ + p_0^-) \Big|_{z=0} = 1$

Procedendo induttivamente si può vedere che, con la stessa rappresentazione integrale usata per p_0^\pm , si possono ricavare le soluzioni di tutte le altre equazioni di trasporto nella forma

$$(2.21) \quad p_{-k}^\pm(z, x, \xi) = e^{\mp iz} \int_{L^\pm} e^{iz\sigma} (\sigma \pm 1)^{\nu_0(x) - 1/2} \theta_{-k}^\pm(\sigma, x, \xi) d\sigma$$

dove θ_{-k}^{\pm} è una funzione regolare in (x, ξ) , $\xi \neq 0$, omogenea di grado $-k$ in ξ , tale che

$$(2.22) \quad \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \theta_{-k}^{\pm} = \sum_{\substack{l \in \text{insieme} \\ \text{finito di indici}}} \gamma_{\alpha\beta l}^{\pm} (\sigma, x, \xi) (\ln |\sigma \mp 1|)^l,$$

con $\gamma_{\alpha\beta l}^{\pm}$ analitici in una striscia verticale intorno ai punti $\sigma = \pm 1$, con un polo d'ordine al più k in $\sigma = \pm 1$ e rapidamente decrescenti per $|\text{Im } \sigma| \rightarrow +\infty$.

Una stima dell'andamento asintotico degli integrali in (2.20), (2.21) per $z \rightarrow +\infty$ dice che

$$(2.23) \quad p_{-k}^{\pm}(z, x, \xi) \sim z^{-\nu_0(x) - 1/2} \cdot \sum_{l \geq -k} \sum_{\text{finita}} r \cdot c_{k, l, r}^{\pm}(x, \xi) z^{-l} (\ln z)^r,$$

dove i $c_{k, l, r}^{\pm}$ sono omogenei di grado $-k$ in ξ .

Questa stima permette di sommare la serie asintotica

$\sum_{k \geq 0} p_{-k}^{\pm}(2\sqrt{t} a(x, \xi), x, \xi)$ nelle classi di (1.9) con $\mu = -\sup_x \text{Re } \nu_0(x) - 1/2$.
La parametrica così calcolata ha il seguente aspetto:

$$(2.24) \quad E g(t, x) = \int e^{i\chi \cdot \xi} \chi (t|\xi|^2) q(t, x, \xi) \hat{g}(\xi) d\xi + \sum_{\pm} \int e^{i\phi^{\pm}(t, x, \xi)} (1 - \chi(t|\xi|^2)) p^{\pm}(t, x, \xi) \hat{g}(\xi) d\xi,$$

dove χ è un cut off.

(2.24) ovviamente soddisfa la condizione di traccia in (2).

Si vede subito che però (2.24) non soddisfa l'equazione in (2) per due ragioni.

La prima è un fatto tecnico dovuto all'incollamento delle due

zone: bisogna avere informazioni sul termine

$$[P, \chi(t|\xi|^2)] \{e^{ix \cdot \xi} q - e^{i\phi^+} p^+ - e^{i\phi^-} p^-\}.$$

Questo ostacolo si supera imponendo delle opportune condizioni iniziali

a p_{-k}^+ e a p_{-k}^- , $k > 0$.

La seconda ragione è che il termine

$$(2.25) \quad b^\pm = (1 - \chi(t|\xi|^2)) e^{-i\phi^\pm} P(e^{i\phi^\pm} p^\pm) \notin S^{-\infty}(R_x^n \times R_\xi^n).$$

In effetti ciò che si vede è che

$$|\partial_t^r \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b^\pm(t, x, \xi)| \lesssim |\xi|^{\mu+1-|\beta|+\xi} (\sqrt{t} + \frac{1}{|\xi|})^N, \quad \forall N \geq 0.$$

In questo senso diciamo che $b^\pm \in C^\infty(R_t^+; S_{1,0}^{\mu+1}(R_x^n \times R_\xi^n))$

e che è piatto per $t = 0$.

A questo punto si prova che esistono simboli

$r^\pm \in C^\infty(R_t^+, S_{1,0}^\mu(R_x^n \times R_\xi^n))$, piatti a $t = 0$,

per cui

$$e^{-i\phi^\pm} P(e^{i\phi^\pm} r^\pm) + b^\pm \in C^\infty(R_t^+; S^{-\infty}(R_x^n \times R_\xi^n))$$

piatti a $t = 0$.

Sia R^\pm l'OIF definito da

$$R^\pm g(t, x) = \int e^{i\phi^\pm(t, x, \xi)} r^\pm(t, x, \xi) \hat{g}(\xi) d\xi,$$

allora la vera parametrica ha la forma

$$\mathcal{E}g(t,x) = \int e^{ix \cdot \xi} q(t,x,\xi) \hat{g}(\xi) \, d\xi + \\ + \sum_{\pm} \int e^{i\phi^{\pm}(t,x,\xi)} (p^{\pm}(t,x,\xi) + r^{\pm}(t,x,\xi)) \hat{g}(\xi) \, d\xi .$$

Questa forma permette di provare il Teorema.

Si osservi che l'uguaglianza per la relazione di propagazione dei WF scende dall'ellitticit  degli OIF in \mathcal{E} .

REFERENZE

- [1] A. Bove, J.E. Lewis, C. Parenti - Parametrix for a characteristic Cauchy problem.
- [2] L. Boutet de Monvel - Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudo-differential operators, C.P.A.M., 27 (1974), 585-639.